

## Задания типа В10

*Текстовое задание, моделирующее физические, химические или какие-либо другие процессы. По условию задачи требуется составить и решить линейное либо квадратное уравнение или неравенство и найти искомую величину.*

*Максимальное время выполнения задания, с учетом записи ответа в бланк, – 22 минуты.*

1. При температуре  $0^{\circ}\text{C}$  рельс имеет длину  $l_0 = 12,5$  м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону  $l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ})$ , где  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$  — коэффициент теплового расширения,  $t^{\circ}$  — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.
2. Некоторая компания продает свою продукцию по цене  $p = 600$  руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют  $v = 400$  руб., постоянные расходы предприятия  $f = 600000$  руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле  $\pi(q) = q(p - v) - f$ . Определите наименьший месячный объем производства  $q$  (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 500000 руб.
3. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время  $t$  падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле  $h = 5t^2$ , где  $h$  — расстояние в метрах,  $t$  — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,2 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,1 с? Ответ выразите в метрах.
4. Зависимость объема спроса  $q$  (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены  $p$  (тыс. руб.) задается формулой  $q = 170 - 10p$ . Выручка предприятия за месяц  $r$  (тыс. руб.) вычисляется по формуле  $r(p) = q \cdot p$ . Определите наибольшую цену  $p$ , при которой месячная выручка  $r(p)$  составит не менее 700 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.
5. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону  $h(t) = 1,4 + 9t - 5t^2$ , где  $h$  — высота в метрах,  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?
6. Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка, сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в паскалях, равна  $P = m \left( \frac{v^2}{L} - g \right)$ , где  $m$  — масса воды в килограммах,  $v$  — скорость движения ведерка в м/с,  $L$  — длина веревки в метрах,  $g$  — ускорение свободного падения (считайте  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 1,6 м? Ответ выразите в м/с.
7. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону  $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0kt + \frac{g}{2}k^2t^2}$ , где  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана,  $H_0 = 5$  м — начальная высота столба воды,  $k = \frac{1}{200}$  — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а  $g$  — ускорение свободного падения (считайте  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

8. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой  $y = ax^2 + bx$ , где  $a = -\frac{1}{60} \text{ м}^{-1}$ ,  $b = \frac{7}{6}$  — постоянные параметры,  $x$  (м) — смещение камня по горизонтали,  $y$  (м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра.

9. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  — время в минутах,  $T_0 = 1450 \text{ К}$ ,  $a = -12,5 \text{ К/мин}^2$ ,  $b = 175 \text{ К/мин}$ . Известно, что при температуре нагревателя свыше 1750 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.

10. Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону  $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$ , где  $t$  — время в минутах,  $\omega = 40^\circ/\text{мин}$  — начальная угловая скорость вращения катушки, а  $\beta = 4^\circ/\text{мин}^2$  — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки  $\varphi$  достигнет  $3000^\circ$ . Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

11. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью  $v_0 = 57 \text{ км/ч}$ , выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением  $a = 12 \text{ км/ч}^2$ . Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением  $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ . Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ выразите в минутах.

12. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью  $v_0 = 30 \text{ м/с}$ , начал торможение с постоянным ускорением  $a = 5 \text{ м/с}^2$ . За  $t$  секунд после начала торможения он прошёл путь  $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$  (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 80 метров.

13. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных сосновых цилиндров: центрального массой  $m = 8 \text{ кг}$  и радиуса  $R = 5 \text{ см}$ , и двух боковых с массами  $M = 2 \text{ кг}$  и с радиусами  $R + h$ . При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в  $\text{кг} \cdot \text{см}^2$ , дается формулой  $I = \frac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$ . При каком максимальном значении  $h$  момент инерции катушки не превышает предельного значения  $1900 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$ ? Ответ выразите в сантиметрах.

14. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле:  $F_A = \rho g l^3$ , где  $l$  — длина ребра куба в метрах,  $\rho = 1000 \text{ кг} \cdot \text{м}^3$  — плотность воды, а  $g$  — ускорение свободного падения (считайте  $g = 9,8 \text{ Н/кг}$ ). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем  $1225 \text{ Н}$ ? Ответ выразите в метрах.

15. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела  $P$ , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры:  $P = \sigma S T^4$ , где

$\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$  — постоянная, площадь  $S$  измеряется в квадратных метрах, а температура  $T$  — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь  $S = \frac{1}{228} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$ , а излучаемая ею мощность  $P$  не менее  $1,5625 \cdot 10^{25}$  Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

16. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием  $f = 50$  см. Расстояние  $d_1$  от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 55 до 70 см, а расстояние  $d_2$  от линзы до экрана — в пределах от 260 до 300 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение  $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$ . Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

17. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой  $f_0 = 267$  Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка  $f$  больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону  $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$  (Гц), где  $c$  — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются более чем на 3 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а  $c = 315$  м/с. Ответ выразите в м/с.

18. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна  $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ , где  $\varepsilon$  — ЭДС источника (в вольтах),  $r = 1$  Ом — его внутреннее сопротивление,  $R$  — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания  $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$ ? (Ответ выразите в омах.)

19. Сила тока в цепи  $I$  (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома:  $I = \frac{U}{R}$ , где  $U$  — напряжение в вольтах,  $R$  — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать.

20. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы, определяемой по формуле  $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$ , где  $\omega$  — частота вынуждающей силы (в  $\text{с}^{-1}$ ),  $A_0$  — постоянный параметр,  $\omega_p = 300 \text{ с}^{-1}$  — резонансная частота. Найдите максимальную частоту  $\omega$ , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину  $A_0$  не более чем на 80%. Ответ выразите в  $\text{с}^{-1}$ .

21. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет  $R_1 = 90$  Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление  $R_2$  этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями  $R_1$  Ом и  $R_2$  Ом их общее сопротивление задается формулой  $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 9 Ом. Ответ выразите в омах.

22. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$ , где  $T_1$  — температура нагревателя (в градусах Кельвина),  $T_2$  — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя  $T_1$  КПД этого двигателя будет не меньше 25%, если температура холодильника  $T_2 = 276$  К?

23. Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой  $m$  (в килограммах) от температуры  $t_1$  до температуры  $t_2$  (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массы  $M$  кг. Он определяется формулой  $\eta = \frac{cm(t_2 - t_1)}{qM} \cdot 100\%$ , где  $c = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К) — теплоёмкость воды,  $q = 8,3 \cdot 10^6$  Дж/кг — удельная теплота сгорания дров. Определите наименьшее количество дров, которое понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть  $m = 80$  кг воды от  $17^\circ\text{C}$  до кипения, если известно, что КПД кормозапарника не больше 14%. Ответ выразите в килограммах.
24. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу  $m = 1530$  тонн представляют собой две пустотелые балки длиной  $l = 17$  метров и шириной  $s$  м. каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килоПаскалях, определяется формулой  $p = \frac{mg}{2ls}$ , где  $m$  — масса экскаватора (в тоннах),  $l$  — длина балок (в метрах),  $s$  — ширина балок (в метрах),  $g$  — ускорение свободного падения (считайте  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление  $p$  не должно превышать 300 кПа. Ответ выразите в метрах.
25. К источнику с ЭДС  $\varepsilon = 130$  В и внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением  $R$  Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, дается формулой  $U = \frac{\varepsilon R}{R+r}$ . При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 120 В?
26. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала  $f_0 = 130$  Гц и определяется следующим выражением:  $f = f_0 \frac{c+u}{c-v}$  (Гц), где  $c$  — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а  $u = 6$  м/с и  $v = 13$  м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости  $c$  распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике  $f$  будет не менее 140 Гц?
27. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 124 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле  $v = c \frac{f - f_0}{f + f_0}$ , где  $c = 1500$  м/с — скорость звука в воде,  $f_0$  — частота испускаемых импульсов (в МГц),  $f$  — частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отраженного сигнала  $f$ , если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.
28. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной  $l$  км с постоянным ускорением  $a$  км/ч<sup>2</sup>, вычисляется по формуле  $v = \sqrt{2la}$ . Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,4 километра, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч<sup>2</sup>.
29. При движении ракеты, ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону  $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , где  $l_0 = 75$  м — длина покоящейся ракеты,  $c = 3 \cdot 10^5$  км/с — скорость света, а  $v$  — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 72 м? Ответ выразите в км/с.
30. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте  $h$  над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле  $l = \sqrt{2Rh}$ , где  $R = 6400$  км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 4 километров? Ответ выразите в метрах.